

Streszczenie rozprawy doktorskiej

## **Minimalne zbiory generatorów 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych i problem izomorfizmu odpowiednich grafów Cayley'a**

W ciągu ostatniego półwiecza teoria grafów Cayley'a stała się obszerną dziedziną badawczą z pogranicza teorii grafów i teorii grup, która ma ustaloną problematykę i liczne zastosowania w innych dziedzinach matematyki dyskretnej. Wiele współczesnych badań w zakresie tej tematyki skupia się na problemie izomorfizmu grafów Cayley'a ([2], [5], [6]). Tematyka  $p$ -podgrup Sylowa grup symetrycznych i alternujących również stanowi obecnie obszerną dziedzinę badawczą. Była ona w szczególności badana przez L. Kaloujnine'a (por. [3, 4]), V. Sushchansky'ego ([1, 10]) i ich uczniów.

W pracy badawczej przypadek  $p = 2$  szczególnie wyróżnia się spośród pozostałych  $p$ -podgrup Sylowa grup symetrycznych. Na bardzo wczesnym etapie badania tych podgrup zauważono, że ze względu na swoją specyfikę wymaga on zupełnie odrębnego podejścia i metod badawczych niż przypadek ogólny (we wczesnych pracach Kaloujnine'a dotyczących  $p$ -podgrup Sylowa grup symetrycznych autor zakładał, że  $p \neq 2$ ). Jednym z istotniejszych faktów wyróżniających ten przypadek jest to, że do dzisiaj nie została scharakteryzowana grupa automorfizmów tej grupy (dla  $p \neq 2$  znana jest pełna charakteryzacja).

Niniejsza dysertacja dotyczy badania grafów Cayley'a 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych. Głównym jej wynikiem jest oszacowanie liczby nieizomorficznych grafów Cayley'a 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych dla diagonalnych zbiorów generatorów. Wybór tych zbiorów generatorów wynika z ich szczególnej struktury, która nadaje im szereg unikalnych zastosowań w ogólnej teorii grup (są to zbiory generatorów, które odpowiadają automorfizmom drzewa 2-adycznego z korzeniem działającym tylko na ustalonym poziomie tego drzewa). Ponadto scharakteryzowano orbity zbioru baz 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych względem działania automorfizmami wewnętrznymi, a także określono wszystkie możliwe długości obwodów tych grafów.

Rozdział 1 zawiera podstawowe definicje i znane własności  $p$ -podgrup Sylowa grup symetrycznych oraz grafów Cayley'a. Szczegółowo opisano w nim obecny zakres

wiedzy na temat problemu izomorfizmu grafów Cayley'a  $p$ -podgrup Sylowa grup symetrycznych, co stanowi punkt odniesienia dla badań podjętych w ramach pracy i uzyskanych wyników.

W Rozdziale 2 przedstawiona jest charakteryzacja minimalnych zbiorów generatorów 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych ze szczególnym uwzględnieniem diagonalnych zbiorów generatorów. Wyszczególniono w nim szczególny typ baz diagonalnych, które są reprezentantami orbit na zbiorze wszystkich baz tej grupy względem działania zbiorem automorfizmów wewnętrznych. Wynik ten pozwolił na określenie ograniczenia górnego liczby nieizomorficznych grafów Cayley'a 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych (wynik ten opublikowano w [8]). W Rozdziale 2 podjęty jest również temat badania relacji na zbiorach generatorów baz diagonalnych, którego wyniki zostały w Rozdziale 3 wykorzystane do określenia długości minimalnych cykli rozpatrywanych grafów Cayley'a.

Badanie struktury i problemu izomorfizmu grafów Cayley'a 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych na bazach diagonalnych przedstawiono w Rozdziale 3. Podano w nim metodę rekurencyjnej konstrukcji tych grafów, określono ich wszystkie możliwe obwody oraz ograniczenia górne i dolne na liczbę nieizomorficznych grafów tego typu ([9]). Rozdział 3 zamyka przegląd uzyskanych wyników dla 2-podgrup Sylowa grup symetrycznych  $S_{2^n}$  dla małych wartości  $n$ .

## Literatura

- [1] A. Bier, V. Sushchansky, *Kaluzhnin's representations of Sylow  $p$ -subgroups of automorphism groups of  $p$ -adic rooted trees* Algebra Discrete Math., 19:1 (2015), 19-38.
- [2] E. Dobson, *Isomorphism problem for Cayley graphs of  $Z_p^3$* . Discrete Math. 147/1-3 (1995), 87–94.
- [3] L. Kaluzhnin, *Sur les  $p$ -group de Sylow du groupe symetrique du degre  $p^m$* , C. R. Acad. Sci. Paris 221 (1945), 222–224.
- [4] L. Kaluzhnin, *La structure des  $p$ -groupes de Sylow des groupes symetriques finis*, Ann. Sci. l'Ecole Norm. Sup. 65 (1948), 239–272.
- [5] J. Meng, M. Xu, *On the isomorphism problem of Cayley graphs of abelian groups*, Discrete Math. 187/1-3 (1998), 161–169.
- [6] C. Li, C. Praeger, *On the isomorphism problem for finite Cayley graphs of bounded valency*, European J. Combin. 20/4 (1999), 279–292.

- [7] B. Pawlik, *Involutive bases of Sylow 2-subgroups of symmetric and alternating groups*, Zesz. Nauk. Pol. Śl., Mat. Stos. 5 (2015), 35–42.
- [8] B. Pawlik, *The action of Sylow 2-subgroups of symmetric groups on the set of bases and the problem of isomorphism of their Cayley graphs*, Algebra Discrete Math. 21/2 (2016), 264–281.
- [9] B. Pawlik, *The Girth of Cayley graphs of Sylow 2-subgroups of symmetric groups  $S_{2^n}$  on diagonal bases*, praca w recenzji.
- [10] V. Sushchansky, A. Słupik, *Minimal generating sets and Cayley graphs of Sylow  $p$ -subgroups of finite symmetric groups*, Algebra Discrete Math., no. 4, (2009), 167–184.