

Prof. dr hab. Piotr Biler
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław
tel. 71 375 7408
e-mail: Piotr.Biler@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 9.04.2018.

Opinia o rozprawie doktorskiej mgr. Piotra Knosalli

Mgr Piotr Knosalla przedstawił rozprawę doktorską pt. *Równania aerotaksji* napisaną pod opieką profesora Tadeusza Nadziei.

Doktorant jest autorem dwóch prac (w tym jednej współautorskiej) opublikowanych w *Applicationes Mathematicae*.

64-stronnicowa rozprawa dotyczy wszechstronnego badania pewnego modelu z biologii, bliskiego układowi równań chemotaksji Keller–Segela

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u \nabla E(p)) \quad (1)$$

$$p_t = \Delta p - E(p)g(u). \quad (2)$$

Z matematycznego punktu widzenia jest to układ dwóch równań parabolicznych, a o istotnej trudności zagadnienia decydują wyrazy nieliniowe $\nabla \cdot (u \nabla E(p))$, i dlatego nie ma żadnego “szybkiego” argumentu na istnienie rozwiązań i określenie ich asymptotyki.

W interpretacji biologicznej $u \geq 0$ jest gęstością kolonii bakterii a p gęstością niezbędnego dla bakterii tlenu. Równanie (1) opisuje dyfuzję i transport mikroorganizmów o gęstości u w kierunku optymalnego dla nich

stężenia tlenu, a równanie (2) dyfuzję tlenu i jego zużycie przez bakterie. Układ jest uzupełniony stosownymi warunkami początkowymi oraz brzegowymi wyrażającymi izolowanie brzegu obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bądź zadającymi przepływ tlenu przez część brzegu $\partial\Omega$. O funkcji $E \geq 0$ zakłada się, że ma jedno maksimum i $E(0) = E(\infty) = 0$.

Natomiast o funkcji g zakłada się, że $g(u) \leq Cu^\alpha$ dla pewnego $\alpha \leq 1$, $\alpha < \frac{2}{n}$. Warto tu zaznaczyć, że naturalny przypadek $g(u) \equiv u$ odpowiada tzw. modelowi chemotaksji z konsumpcją chemoatraktanta, a znane wyniki dotyczą tylko wymiarów $n \leq 3$ (prace Y. Tao, M. Winklera ([Tao], [TW]), Q. Zhanga i Y. Li (*Convergence rates of solutions for a two-dimensional chemotaxis-Navier-Stokes system*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 20 (2015), 2751–2759; *Stabilization and convergence rate in a chemotaxis system with consumption of chemoattractant*, *J. Math. Phys.*, 56 (2015), 081506, 10); przypadek $n \geq 4$ wymaga np. stosowania tzw. rozwiązań zrenormalizowanych).

Równania wyglądają pozornie prosto, ale ich analiza wymaga nierzadko subtelnych metod.

Doktorant w kolejnych rozdziałach wyprowadza równania z heurezy biologicznej, bada rozwiązania stacjonarne, zagadnienie ewolucyjne (najbardziej obszerna część rozważań) i asymptotykę rozwiązań zagadnienia jednowymiarowego. Otrzymane wyniki dotyczą istnienia i w niektórych przypadkach jednoznaczności rozwiązań, regularności lokalnych w czasie rozwiązań zagadnienia ewolucyjnego i warunków na przedłużanie rozwiązań do globalnych w czasie i wreszcie określenia warunków na

zbieżność do stanów stacjonarnych.

Do zbadania istnienia rozwiązań stacjonarnych w rozdziale drugim (w przypadku jednowymiarowym i w symetrii radialnej) zostało użyte twierdzenie o punkcie stałym Schaefera, a do uzyskania potrzebnego oszacowania *a priori* elementarny ale pomysłowy Lemat 2.o.6. Dla zagadnienia z warunkiem Neumanna (szczególnie subtelne bo w tzw. rezonansie) wstępna analiza polega na zastosowaniu metody Lapunowa–Schmidta. Oprócz wyników o istnieniu podane są też warunki na nieistnienie rozwiązań stacjonarnych. W takich sytuacjach interesujące byłoby zbadanie zachowania rozwiązań zagadnienia ewolucyjnego; spodziewać się można efektów wybuchu w skończonym czasie (nieprzedłużalności rozwiązań lokalnych w czasie).

W rozdziale trzecim konstruowane są lokalne w czasie rozwiązania klasyczne zagadnienia (1)–(2) metodą oszacowań Schaudera. Następnie bada się możliwość przedłużenia ich do rozwiązań globalnych w czasie (przy dodatkowych założeniach o funkcji g), używając iteracyjnych oszacowań *a priori* Alikakosa–Mosera. Alternatywne podejście do lokalnego w czasie istnienia rozwiązań oparte jest na abstrakcyjnym schemacie Amanna.

W czwartym rozdziale asymptotyczna stabilność stanów stacjonarnych dowodzona jest przy (żmudnym) wykorzystaniu oszacowań typu energetycznego.

Praca napisana jest jasno choć zwięźle, z troską o wyjaśnienie trudniejszych szczegółów. Jedynym wyjątkiem jest opuszczony fragment tezy w Lemacie 3.2.7 na str. 39.

Drobne usterki zauważone w pracy to używanie określenia *Schauderowskie* zamiast *schauderowskie*, jak jest przyjęte, *lipschitzowskość* zamiast *właśność Lipschitza*, *prezwarty* zamiast *warunkowo zwarty*, a także rzadkie literówki (na str. 3₆: *lives*, na str. 25⁴ *postać*, na str. 33₁₄ jest powtórzenie *funkcji*, na str. 46₁₅ i 54₇ powinno być: *Nirenberga*, na str. 56₈: *Schwarza*, w [A1₂] listy referencji powinno być: *Alikakos*, w [Ito]: *Itô*).

Rozprawa świadczy o dużej wiedzy doktoranta w zakresie różnorodnych technik dla równań różniczkowych typu eliptycznego i parabolicznego. Potrafi on skutecznie operować subtelnymi narzędziami współczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych takimi jak oszacowania schauderowskie, oszacowania energetyczne i konstrukcje słabych rozwiązań w przestrzeniach Sobolewa, półgrupy analityczne, teoria maksymalnej regularności parabolicznej i abstrakcyjna teoria Amanna układów parabolicznych, iteracje Alikakosa–Mosera, itd. Doktorant też dobrze orientuje się w literaturze dotyczącej tego i zbliżonych zagadnień.

Przechodząc do konkluzji: uważam, że ta solidna rozprawa spełnia wymagania ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Piotr Biler