Recenzja pracy doktorskiej przedstawionej przez mgra Piotra Knosallę pt.
"Równania aerotaksji"

Piotr Knosalla przedstawił rozprawę doktorską "Równania aerotaksji", której promotorem jest prof. Tadeusz Nadzieja. Rozprawa składa się z czterech części, pierwsza to słowo wstępne oraz wprowadzenie modelu. Jak dowiadujemy się z części wstępnej, tematem rozprawy są własności rozwiązań układu dwóch równań różniczkowych cząstkowych typu parabolicznego.

Rozważany układ ma postać

$$u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla E(p)),$$

$$p_t = \Delta p - E(p)g(u),$$

gdzie g i E to pewne funkcje. Dodatkowo powyższy układ uzupełniony jest nieujemnymi warunkami początkowymi u_0, p_0 oraz warunkami brzegowymi. Mamy warunek braku przepływu przez brzeg dla pierwszego równania i dwie wersje warunku brzegowego na p związane z drugim równaniem. Poza przedstawieniem zagadnienia, w tym sformułowaniem warunków na funkcje g i E, w rozdziałach wprowadzających autor prezentuje biologiczną motywację rozważanych równań.

Główna treść rozprawy P.Knosalli zawarta jest w rozdziałach drugim, trzecim i czwartym. Rozdział drugi poświęcony jest zagadnieniu stacjonarnemu, studiowaniu rozwiązań niezależnych od czasu. W rozdziale trzecim autor dowodzi istnienia lokalnego oraz globalnego (przy pewnych mniej ogólnych warunkach) w czasie zagadnienia ewolucyjnego. Wreszcie, rozdział czwarty odnosi się do zbieżności rozwiązań ewolucyjnych do stanów stacjonarnych w jednowymiarowej wersji równań aerotaksji.

Omówię teraz bardziej szczegółowo rozdziały 2-4. W rozdziale drugim zagadnienie stacjonarne sprowadzone jest (w klasyczny sposób, znany w tego typu równaniach) do jednego nielokalnego równania

$$\Delta P = E(P)g\left(\frac{Me^{E(P)}}{\int e^{E(P)}}\right), \tag{0.1}$$

gdzie M to masa u_0, funkcję U odzyskuje się jako

$$U(x) = \frac{Me^{E(P)}}{\int e^{E(P)}}.$$

Zagadnienie uzupełnione jest o odpowiednie warunki brzegowe. Wśród uzyskanych rezultatów mamy do czynienia z klasyfikacją ilości rozwiązań stacjonarnych, tak dla danych brzegowych Dirichleta, jak i Neumanna. Klasyfikacja jest dość dokładna w przypadku zagadnienia jednowymiarowego oraz w przypadku rozwiązań sferycznie symetrycznych. Szczególnie Twierdzenie 2.0.8, dotyczące jednoznaczności rozwiązań w wymiarze $n = 1$ oraz rozwiązań sferycznie symatrycznych, zrobiło na mnie duże wrażenie. Jest ono dość niestandardowe, autor wykorzystuje silnie strukturę problemu. Dodatkowo przedstawione rozumowanie jest skomplikowane i jego przeprowadzenie, oparte na nietrywialnych lematach 2.0.6 i 2.0.7, które wymagały nie tylko dowodu, lecz przede wszystkim dostrzeżenia, że będą one pomocne przy dowodzie Tw. 2.0.8, świadczy o pomysłowości autora. W części rozdziału związanej z jednowymiarowymi oraz sferycznie symetrycznymi rozwiązaniami, konstruując ostatnie, Knosalla używa metod punktu stałego w przestrzeni funkcji ciągłych oraz metody strzelania. Ta część pracy oparta jest na publikacji [KN], wspólnej z promotorem (przy czym w tejże studiowane jest jedynie zagadnienie 1d, rozszerzenie na sferycznie symetryczne rozwiązania wydaje się być wkładem autora). Chciałem zaznaczyć, że w publikacji [KN] autorzy informują czytelnika, że twierdzenie analogiczne do najciekawszego Tw. 2.0.8 inspirowane było wcześniejszą pracą Nadziei i Krzywickiego. W swojej rozprawie Piotr Knosalla nie wspomina nic na ten temat. Będę w trakcie obrony chciał się dowiedzieć więcej w tej kwestii.

Pozostała część rozdziału drugiego to rozszerzenie pewnej części wyników na przypadek wielowymiarowy. Niestety, obawiam się, że znalazłem tu dość poważny błąd w rozprawie. Autor chce pracować z rozwiązaniami klasycznymi, i rzeczywiście np. już Lemat 2.0.15 wymaga pracy z rozwiązaniami klasycznymi. Niestety, powodowany wcześniejszymi wynikami jednowymiarowymi, autor konstruuje rozwiązania jako punkty stałe w przestrzeni funkcji ciągłych. Ale wówczas prawa strona (0.1) jest tylko funkcją ciągłą, a to znaczy, że o drugich pochodnych U nie można powiedzieć, że są one dwukrotnie różniczkowalne. To znany fakt. Aby uratować tą część pracy, Knosalla musi użyć oszacowań szauderowskich, a te wymagają prawej strony (0.1) jako funkcji hölderowsko ciągłej. Aby to zapewnić, rozwiązanie otrzymane w pierwszym etapie konstrukcji jako punkt stały, patrz np. Tw. 2.0.18, musi być złapane w procedurze punktu stałego w przestrzeni funkcji hölderowskich. Jestem przekonany, że to da się zrobić, ale będę chciał usłyszeć jak, w trakcie obrony pracy. Dodatkowo, oczekuję, że P.Knosalla będzie w trakcie obrony znał przykład, na to że prawa strona f ciągła nie gwarantuje istnienia rozwiązania klasycznego u równania $\Delta u = f$.

Rozdział trzeci dotyczy zagadnienia ewolucyjnego. Autor konstruuje rozwiązanie lokalne w czasie na dwa sposoby. Poprzez użycie metod słabych rozwiązań i oszacowań szauderowskich w przestrzeni funkcji hölderowskich (co napawa mnie optymizem w kwestii tego, że Knosalla poradzi sobie z zagadnieniem stacjonarnym w tej przestrzeni) oraz poprzez teorię Amanna. Następnie, przy pewnych warunkach strukturalnych, dzięki iteracyjnemu oszacowaniu normy L^∞ rozwiązania metodą Mosera-Alikakosa, mgr Knosalla uzyskuje przedłużenie rozwiązania na dowolny czas. Ta część pracy jest dość standardowa, niemniej autor wykazał się w niej swobodą w posługiwaniu się takimi metodami równań ewolucyjnych jak teoria półgrup, oszacowania szauderowskie czy metoda Alikakosa-Mosera, co dość dobrze świadczy o jego warsztacie. Rozdział trzeci oparty jest na samodzielnej pracy autora, [K]. A właściwie jest rozszerzeniem jego wyników na wyższe wymiary.

Ostatni rozdział dotyczy zachowania asymptotycznego jednowymiarowego rozwiązania równań aerotaksji. Autor dowodzi dwa twierdzenia, jedno mówiące o lokalnej stabilności zagadnienia Dirichleta, drugie mówiące o asymptotyce w zagadnieniu Neumanna, globalnej, ale pod warunkiem małej masy. Drugie z tych twierdzeń wydaje mi się ciekawsze, mniej standardowe. Dodatkowo, w przypadku pierwszego Tw. 4.0.3, mam wątpliwość co do jednej z jego konkluzji, mianowicie nie widzę dlaczego ostatnia nierówność na stronie 58 daje eksponencjalną zbieżność rozwiązania. To, że nierówność implikuje zbieżność wydaje się być jasne, mam jednak wątpliwości co do prędkości tej zbieżności. Autor twierdzi, że tak jest, nie przytaczajac na poparcie żadnego dowodu, będę się go domagał w trakcie obrony. Nawet, jeśli teza Tw. 4.0.3 okaże się trochę słabsza (po prostu zbieżność, bez ustalenia prędkości), nie obniży to szczególnie mojej opinii na temat rozprawy doktorskiej P.Knosalli, o której w szczegółach za chwilę.

Na koniec pozwolę sobie odnieść się do staranności przedstawienia wyników przez P.Knosallę. Otóż, paradoksalnie mimo chyba sporej luki, część stacjonarna jest napisana bardzo solidnie, w całym rozdziale drugim znalazłem jedynie misprint w sformułowaniu Lematu 2.0.7, brakuje tam indeksu na dole P w punkcie (ii). Ponadto, wzór rozbity między stroną osiemnastą, a dziewietnastą jest pewną niezręcznością w kwestii edycji.

W rozdziałach trzecim i czwartym jest więcej pomyłek i niezręczności językowych, ale wyniki zaprezentowane są dość uczciwie. Główne problemy to brak modułu w formule powyżej (4.24) i brak kwadratów w trzecim wzorze od góry na stronie 62. Wreszcie, 'przecałkujmy' piszemy bez użycia 'ó'(!), patrz pierwsze zdanie dowodu Lematu 4.0.5.

Pora podsumować i przedstawić moją opinię na temat rozprawy mgra P.Knosalli. Na treść rozprawy złożyły się wyniki opublikowane już w dwóch pracach: [KN] i [K]. Ponadto, uogólnienia wyników z [KN] o stanach stacjonarnych na rozwiązania sferycznie symetryczne oraz, w przypadku załatania wspomnianej przeze mnie luki, na dowolne rozwiązania w wyższych wymiarach, mają szansę być uczciwie opublikowane. Niemniej jednak, wymagają wzmocnienia pierwszego kroku konstrukcji rozwiązań. Rozdział czwarty także zawiera publikowalne wyniki. Rozumiem, że są one samodzielnymi wynikami P.Knosalli. Autor wykazał się dobrym opanowaniem kilku ważnych technik w równaniach eliptycznych jak i parabolicznych. Z jednej strony dość swobodnie operuje metodą półgrup, oszacowaniami energetycznymi, iteracją Mosera, z drugiej zaś operatorami Greena dla równań eliptycznych, zasadami maksimum oraz używa swobodnie twierdzeń o punktach stałych do konstrukcji rozwiązań równań cząstkowych.

Jeśli chodzi o dostrzeżony przez mnie błąd, to w matematyce takie rzeczy się zdarzają, jesteśmy trochę na ostrzu noża, trzeba uważać, żeby nie zrobić sobie krzywdy.

Całość pracy oceniam pozytywnie i jestem przekonany, że spełnia ona ustawowe jak i zwyczajowe wymagania, aby wystąpić o dopuszczenie mgra Piotra Knosalli do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 17.04.2018
dr hab. Tomasz Cieślak, prof ndzw. IMPAN