dr hab. Czesław Bagiński, prof. PB
Wydział Informatyki
Politechnika Białostocka

Recenzja rozprawy doktorskiej

MINIMALNE ZBIORY GENERATORÓW 2-PODGRUP SYLOWA GRUP SYMETRYCZNYCH I PROBLEM IZOMORFIZMU ODPOWIEDNICH GRAFÓW CAYLEY'A

magistra Bartłomieja Pawlika

dla Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Opolskiego

Praca liczy 59 stron. Jest podzielona na trzy rozdziały poprzedzone spisem treści, wstępem i spisem ważniejszych oznaczeń i skrótów. Na końcu pracy zamieszczono spis cytowanej literatury liczący 25 pozycji, w tym dwie samodzielne prace Autora (jedna w *Algebra and Discrete Mathematics*, druga w *Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej*).

We wstępie, liczącym 5 stron, Autor przedstawia dość ogólne obserwacje, sytuujące jego badania w ogólnym kontekście teorii grafów, w tym grafów Cayley'a, precyzuje cel pracy, omawia jej plan i formułuje najważniejsze wyniki. Treść wstępu nie przedstawia w zadowalającym stopniu motywacji dla prezentowanych dalej badań. Pewne, uzupełnienie tej motywacji można znaleźć w Rozdziale I.

Lakoniczny Rozdział I (6 stron) zatytułowany „Wprowadzenie", zawiera omówienie „kształtu" p-podgrup Sylowa grup symetrycznych, podstawowe definicje z teorii grafów i pokrótce omawia zagadnienie izomorfizmu grafów Cayley'a. Przywołuje łatwy lemat wyjaśniający, kiedy taki graf ma cykl długości k oraz twierdzenie z pracy Suszczańskiego i Słupika podające warunek wystarczający na to, by klasy izomorfizmów grafów Cayley'a grupy $G = P_n(p)$ (n-krotnie iterowanego splotu grupy cyklicznej rzędu p) były jednoznacznie określone przez działanie grupy $\mathrm{Aut}(G)$.

Rozdział II – „Bazy grupy $P_n(2)$" – liczy 24 strony. Zawiera krótką wzmiankę o liczbie wszystkich baz rozważanej grupy oraz stwierdzenie o mocy orbit przy działaniu grupy automorfizmów na zbiorze wszystkich baz. Dalej, po zdefiniowaniu baz diagonalnych i prymalnych i określeniu ich ilości podany jest ich opis: twierdzenie mówiące o tym, że każda baza diagonalna jest sprzężona z pewną bazą prymalną, twierdzenia o stabilizatorze zbioru baz diagonalnych przy działaniu grupy $P_n(2)$ na zbiorze wszystkich baz za pośrednictwem sprzężeń oraz własnościach orbit tego działania. Druga część rozdziału jest poświęcona odpowiedzi na pytanie, w jakich sytuacjach istnieją „krótkie" tzw. D-słowa w symbolach elementów baz diagonalnych. Zawiera techniczne lematy i stwierdzenia mające znaczenie dla następnego rozdziału.

W pierwszej części trzeciego, ostatniego rozdziału Autor podaje rekurencyjny sposób tworzenia grafów Cayley'a grupy $P_n(2)$, a w drugiej oszacowanie liczby wszystkich nieizomorficznych grafów

Cayley'a tej grupy. Ostatni fragment pracy, to przykłady ilustrujące rozważane wcześniej parametry i zagadnienia dla $n = 2, 3, 4$, uświadamiające jak szybko rośnie poziom komplikacji rozważanych problemów wraz ze wzrostem n.

Tematyka pracy nie należy do głównych nurtów teorii grup. Określiłbym ją, jako niszową/lokalną mimo, że baza MathSciNet wyświetla ponad 700 publikacji w których pojęcie grafu Cayley'a jest kluczowe. Właściwie, poza wstępem, nie ma odniesień do ostatnio uzyskanych wyników innych autorów (oprócz [25]), a i pobieżny przegląd publikacji z tym słowem kluczowym pokazuje, że temat nie leży w obszarze zainteresowań matematyków z innych ośrodków. Niemniej, uważam tematykę za interesującą z pewnymi perspektywami rozwoju, a zagadnienie zarówno liczby baz, jaki i liczby klas izomorfizmów grafów Cayley'a skończonych grup prostych, gdy bazy składają się z trzech elementów rzędu 2, oceniam jako bardzo trudne i mogące przyciągnąć uwagę wielu specjalistów.

Wyniki autora zamieszczone w pracy są prawdziwe i oryginalne, realizują postawione cele i tym samym składają się na rozwiązanie konkretnego problemu, poszerzające wiedzę dotyczącą badanych obiektów. Ich uzyskanie wymagało opanowania specyficznych technik kombinatorycznych, pomysłowości i uzdolnień matematycznych. Niemniej można mieć pewien niedosyt, ponieważ w trakcie czytania nasuwają się naturalne pytania, zarówno o strukturę grafów Cayley'a (np. czy jest hamiltonowski), jak i strukturę działania grupy na zbiorze jej wszystkich baz, których śladów tu nie ma. One dawałyby możliwość odniesień do innych autorów, pozwalając tym samym na lepsze usytuowanie badań autora w ogólnej problematyce grafów Cayley'a.

Przedstawione fakty są prawdziwe, czasem w znacznie ogólniejszej postaci, jak choćby stwierdzenie 1, które z analogicznym dowodem przechodzi dla dowolnej p-grupy, czy lemat 4, który można uzyskać, jako wniosek z ogólnego faktu sformułowanego w terminach teorii G-modułów skończonych p-grup. Dowody niektórych faktów można istotnie skrócić, np. lemat 6 i stwierdzenie 2 - każde o ponad połowę. Z formalnego punktu widzenia dowód twierdzenia 4 jest niepoprawny i wymaga uszczegółowienia. Autor, za pośrednictwem promotora, przedstawił dowód poprawny, który należałoby dołączyć do materiałów przewodu. Podobnie rzecz się ma z dowodem twierdzenia 11. Co prawda jest on poprawny (jest oparty na subtelnej, ładnej obserwacji), ale jego prezentacja jest zupełnie niezrozumiała. Wyjaśnienia uzupełniające do dowodu, jakie otrzymałem od autora, skracają dowód i likwidują chaos. Tu autor miał okazję uzupełnić dowód eleganckim i przejrzystym zakończeniem, czego jednak nie zrobił.

W pracy można znaleźć pewną liczbę tez stawianych przez Autora i traktowanych przez niego, jako oczywistości, którymi nie są, nawet jeśli wymagają, jedno-, czy dwuzdaniowych uzasadnień. Ich zamieszczenie poprawiałoby ogólne wrażenie. Oto trzy przykłady:

- Na stronie 21 zdefiniowana jest grupa Λ_n i Autor pisze, że jest to elementarna abelowa podgrupa, co faktycznie jest oczywiste, ale że jest maksymalną wśród elementarnych abelowych już takie nie jest; z resztą Autor formułuje to w taki sposób, jakby zakładał ten fakt, a to zapewne nie było zamierzone.

- Na stronie 34 analizowane są D-słowa długości 6. Autor stwierdza, że tylko ostatnia z wymienionych równości nie implikuje istnienia krótszych D-słów, gdy tymczasem wszystkie trzy ostatnie są równoważne temu, że iloczyn dwóch z generatorów jest przemienny z trzecim. Czym więc różni się przypadek ostatni od dwóch wcześniejszych?

- Na stronie 38 Autor zostawia recenzentowi sprawdzenie prawdziwości równości z lini 8.

Język rozprawy jest na ogół na dobrym poziomie, poza tym, że w kilku miejscach można znaleźć niewłaściwe posłużenie się nieprecyzyjnymi, czy potocznymi określeniami. Nie budzi to jednak nieporozumień. Dużo gorsze wrażenie robią literówki występujące we wzorach. Zwrócę uwagę na kilka z nich.

- Już na pierwszej stronie mamy znak iloczynu, zamiast sumy (linia 9), żaden z symboli grup występujących w iloczynie kartezjańskim (linia 14) nie uwzględnia oznaczeń zdefiniowanych na początku i występujących w spisie symboli. Podobnie jest ze wzorem z przedostatniej linijki.
- Na stronie 25 (linie 6-13) prawie żaden wskaźnik nie jest właściwy.
- Na stronie 34 w ośmiu przypadkach D-słowa są przyrównane do 0 zamiast do id.
- Na stronie 47 linijka 9 jest kompletnie wadliwa i cała część tej strony (linie 9-16) są zagadkowe.

Wszystkie te uchybienia, mają negatywny wpływ na postrzeganie całej rozprawy. Wyjaśnienia merytorycznych wątpliwości odnoszących się najważniejszych wyników poprawiają to ogólne nienajlepsze wrażenie. Dlatego stwierdzam, że przedłożona rozprawa spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje o dopuszczenie magistra Bronisława Pawlika do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Czesław Bagiński